**แผนการจัดการเรียนรู้**

**รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม**

**เรื่อง ฟังก์ชันลอการิทึม เวลา 2 ชั่วโมง**

**ผลการเรียนรู้**

เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

**สาระสำคัญ**

**บทนิยาม 8** ฟังก์ชันลอการิทึม ( Logarithm function ) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

โดยที่ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง และ

และฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

# 

**จุดประสงค์การเรียนรู้**

* 1. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
  2. นักเรียนสามารถอธิบายลักษณะกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

**สาระการเรียนรู้**

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ เป็นค่าคงตัว โดย และ เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก ไปทั่วถึง ดังนั้นตัวผกผันของ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก ไป โดยฟังก์ชันผกผันของ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

จาก สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ได้ โดยกำหนดสัญลักษณ์ให้เป็น อ่านว่า “ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ” หรือ “ล็อกเอกซ์ฐานเอ”

นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ

จะเห็นว่าในการเขียน นั้น เสมอ ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

จึงเขียนใหม่ได้เป็น

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่าง กับ ที่เขียนในรูป และ มีความหมายเช่นเดียวกัน ดังนั้น สมการที่แสดงการเท่ากันของจำนวนจริงกับจำนวนที่เขียนในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนจริงบวก จึงอาจเขียนในรูปลอการิทึมได้ เช่น

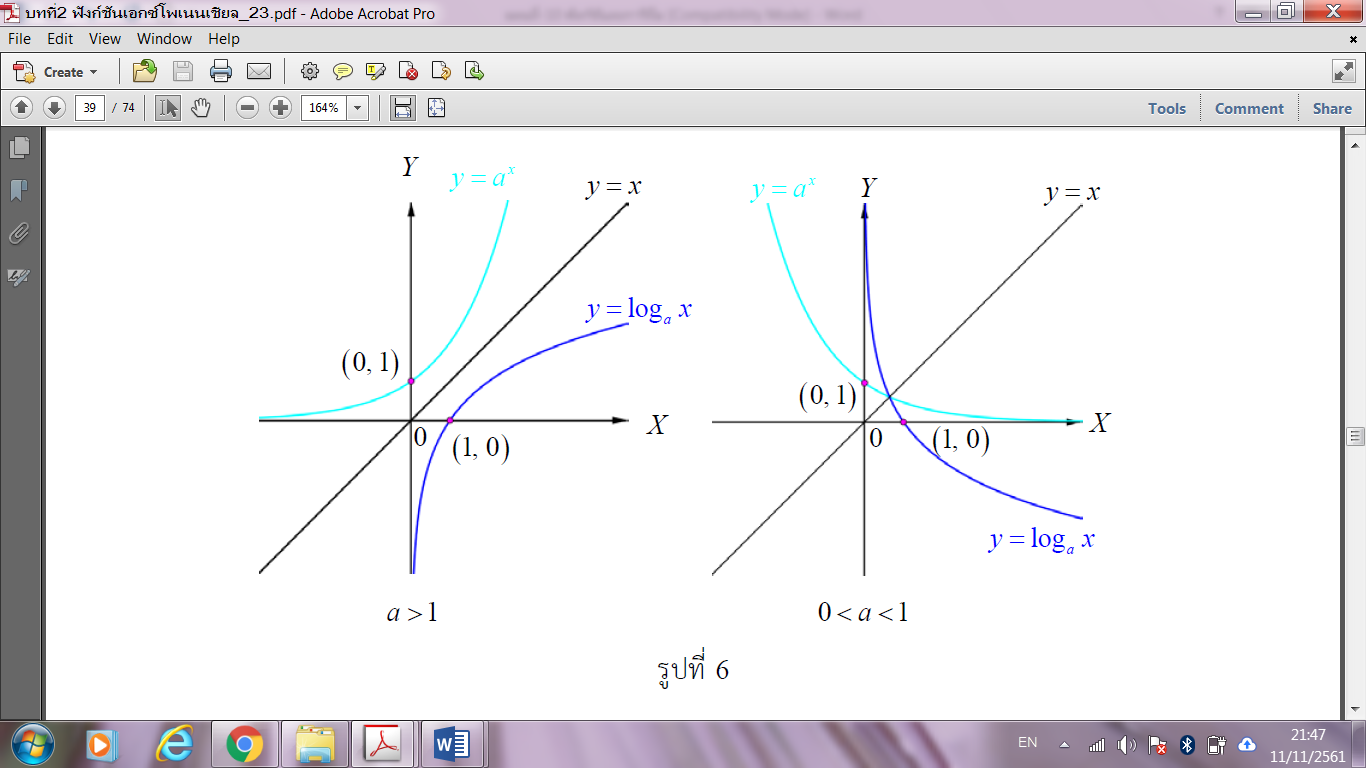
เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น

เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น

เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น

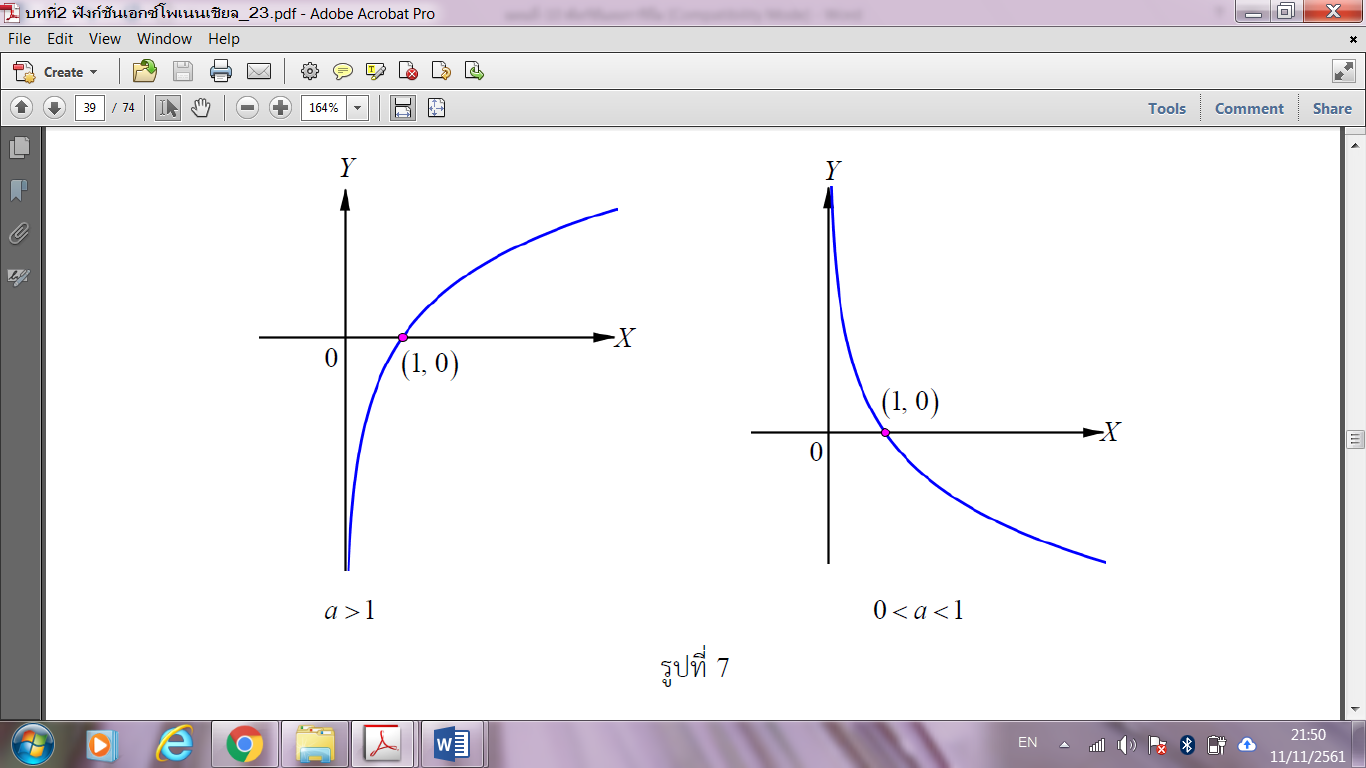
เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น

กราฟของ เมื่อกำหนดค่า เขียนได้จากกราฟของ แล้วสะท้อนข้ามเส้นตรง โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชันผกผัน ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

นั่นคือ กราฟของ มีลักษณะดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

**ข้อสังเกต** 1. กราฟของฟังก์ชัน เมื่อ และ จะผ่านจุด (1, 0) เสมอ เนื่องจาก

2. ถ้า แล้ว เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า แล้ว เป็นฟังก์ชันลด

3. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก ไปทั่วถึง

4. จากสมบัติของฟังก์ชัน 1-1

จะได้ว่า ก็ต่อเมื่อ

5. เนื่องจาก ก็ต่อเมื่อ

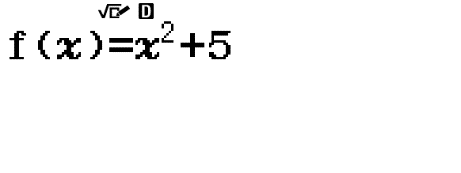
เมื่อแทน แทนในสมการหลังด้วย จะได้

และเมื่อนำ แทนในสมการแรกด้วย จะได้

ดังนั้น และ

**กระบวนการจัดการเรียนรู้**

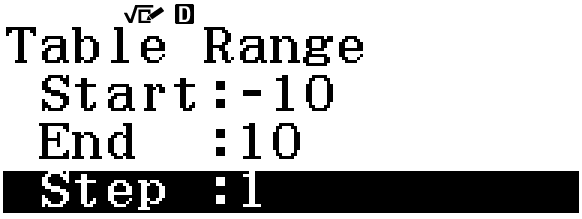
1. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz 

 1.1 กดปุ่ม w9เพื่อเลือกเมนู Table

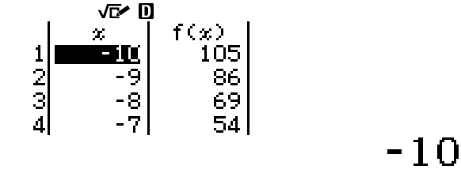
1.2 การป้อนฟังก์ชัน

 กด [d+5

1.3 กดเครื่องหมาย == จะได้หน้าจอ



1.4 กำหนด Table Range จาก -10 ถึง 10

 และ step เท่ากับ 1 โดยกด

z10=10==

จะได้ผลลัพธ์ดังรูป

1.5 กด qT เพื่อสร้าง QR CODE บนหน้าจอ

เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ แล้วใช้สมาร์ทโฟนสแกน QR Code บนหน้าจอเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ เพื่อแสดงกราฟ

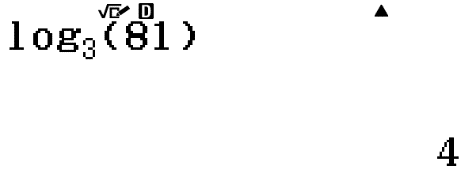
1. ครูทบทวนเรื่องฟังก์ชันผกผัน โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย เช่น f(x) = x + 1 จะได้

f-1(x) = x – 1

1. ครูสอนการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการคำนวณค่าของลอการิทึม



3.1 กดปุ่ม w1 เพื่อเลือกเมนู 1: Calculate



3.2 หาค่าของจำนวนที่อยู่ในรูปลอการิทึม

ในที่นี้หาค่าของ ให้กดปุ่มดังนี้

i3$81=

1. ครูแนะนำบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม โดยให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 10-1 “มารู้จักฟังก์ชันลอการิทึมกันเถอะ” โดยนักเรียนสามารถใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ในการสำรวจได้ เพื่อให้นักเรียนได้สำรวจความสัมพันธ์ของจำนวนในรูปเอกซ์โพเนนเชียลกับจำนวนในรูปลอการิทึม (ขั้นสำรวจ)
2. ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ ในสมการที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังและสมการที่อยู่ในรูปลอการิทึม (ขั้นการหาความสัมพันธ์)
3. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปดังนี้
   1. จำนวนที่เขียนในรูป  มีความหมายเดียวกับ 
   2.  จะหาค่าได้เมื่อ เป็นจำนวนจริง ซึ่งและ 

และ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง (ขั้นการสรุปความสัมพันธ์)

1. ครูให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz สำรวจค่าของฟังก์ชันลอการิทึมและเติมค่าของฟังก์ชันลงในตารางในใบกิจกรรมที่ 10-2 “ฉันอยู่ไหน” และสร้าง QR Code เพื่อแสดงกราฟของฟังก์ชัน โดยในการสร้างกราฟนั้น ครูต้องให้คำแนะนำกับนักเรียนว่า การสร้างกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมที่กำหนดโดย  ในเมนู Table นักเรียนต้องเขียน  ในรูป  ก่อน เช่นจะสร้างกราฟของ  ต้องกำหนดให้  และต้องระบุค่าของ x ให้สอดคล้องกับโดเมนด้วยเสมอเครื่องคำนวณจึงจะแสดงกราฟได้
2. นักเรียนสังเกตค่าของฟังก์ชันลอการิทึมและลักษณะกราฟในใบกิจกรรมที่ 10-2 แต่ละข้อ แล้วตอบคำถามท้ายข้อ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปใบกิจกรรมที่ 10-2
3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.3 หน้า 157 ข้อ 1.–2. ในหนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แล้วครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ (ขั้นฝึกทักษะ)
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 10 โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ แล้วครูกับนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ (ขั้นฝึกทักษะ)
5. ครูให้นักเรียนหาค่าของลอการิทึมของจำนวนจริง โดยการเปลี่ยนสมการลอการิทึมให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง เช่น จงหาค่าของ 

วิธีทำให้ = 

จะได้  = 

 = 

จึงได้  = 

ดังนั้น  = 

นั่นคือ  = 

1. ครูยกตัวอย่างสิ่งที่นักเรียนมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม (ขั้นการแสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) ตัวอย่างเช่น

12.1 สิ่งที่เข้าใจผิด สิ่งที่ถูกต้อง หาค่าไม่ได้

12.2 สิ่งที่เข้าใจผิด หาค่าไม่ได้

เพราะเมื่อ ให้

จะได้

แต่เขียน 3 ในรูป เลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 2 ไม่ได้ ดังนั้น หาค่าไม่ได้

สิ่งที่ถูกต้อง สามารถหาได้

จากการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ได้

12.3 สิ่งที่เข้าใจผิด  เสมอ

สิ่งที่ถูกต้อง เป็นจำนวนจริงลบ หรือ ศูนย์ ได้ เช่น

และ เป็นต้น

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมและลักษณะกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

**สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้**

1. ใบกิจกรรมที่ 10-1 มารู้จักฟังก์ชันลอการิทึมกันเถอะ
2. ใบกิจกรรมที่ 10-2 ฉันอยู่ไหน
3. แบบฝึกทักษะที่ 10
4. หนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
5. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

**การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้**

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 10-1 มารู้จักฟังก์ชันลอการิทึมกันเถอะ
2. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 10-2 ฉันอยู่ไหน
3. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 10
4. ประเมินจากการตอบคำถามในชั้นเรียน

**ใบกิจกรรมที่ 10-1**

**มารู้จักฟังก์ชันลอการิทึมกันเถอะ**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนจงเขียนความสัมพันธ์ของจำนวนต่อไปนี้ในรูปสมการลอการิทึมและรูปเลขยกกำลัง (ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwizได้)

**ตอนที่ 1**

1. เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น
2. เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น
3. เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น
4. เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น
5. เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น
6. เขียนในรูปเลขยกกำลังได้เป็น
7. เขียนในรูปเลขยกกำลังได้เป็น
8. เขียนในรูปเลขยกกำลังได้เป็น

**ตอนที่ 2**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาค่าของ

1. 2)
2. 4)
3. 6)
4. 8)
5. 10)

จากกิจกรรมข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

* สมการในรูป  มีความหมายเดียวกับ......................................................................................................
* จากตอนที่ 2 จำนวนในข้อใดบ้างที่หาค่าไม่ได้................................................................................................................
* จงสร้างข้อความคาดการณ์ว่าจำนวนในรูป  จะหาค่าได้เมื่อ
*  มีค่าอย่างไร ................................................................................
*  มีค่าอย่างไร ................................................................................
* ให้นักเรียนตรวจสอบข้อความคาดการณ์ข้างต้นโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

**ใบกิจกรรมที่ 10-2**

**ฉันอยู่ไหน**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO fx-991EX Classwiz คำนวณค่าลอการิทึม แล้วใส่คำตอบในตารางหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมต่อไปนี้ และตอบคำถามท้ายตาราง

**ตอนที่ 1**

1.  และ 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0.5 |  |  |
| 1 |  |  |
| 1.5 |  |  |
| 2 |  |  |
| 2.5 |  |  |
| 3 |  |  |
| 3.5 |  |  |
| 4 |  |  |

จากตารางในข้อ 1)

เมื่อ มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของ  จะ ............................................................................................

เมื่อ มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของ  จะ ............................................................................................

 เมื่อ  และ  เมื่อ 

1.  และ 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **x** |  |  |
| 0.5 |  |  |
| 1 |  |  |
| 1.5 |  |  |
| 2 |  |  |
| 2.5 |  |  |
| 3 |  |  |
| 3.5 |  |  |

จากตารางในข้อ 2)

เมื่อ มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของ  จะ ............................................................................................

เมื่อ มีค่าเพิ่มขึ้นค่าของ  จะ ............................................................................................  เมื่อ  และ  เมื่อ 

**จากข้อ 1) และ 2) สรุปได้ว่า**

เมื่อ  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  จะได้  เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด...........................

เมื่อ  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  จะได้  เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด............................

กำหนดให้  จะได้ว่า  เมื่อ 

**ตอนที่ 2**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO fx-991EX Classwiz ในการวาดกราฟของ

(หมายเหตุ: การสร้างกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมที่กำหนดโดย  ในเมนู Table ต้องเขียน  ในรูป)

1. ****  และ  2)  และ 

**จากกราฟในข้อ 1)**

*  และ  ตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด.............................................................
*  และ  ตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด.............................................................
*  และ  เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด......................................................................................
* โดเมนของฟังก์ชัน  และ  คือ........................................................................................
* เรนจ์ของฟังก์ชัน  และ  คือ........................................................................................

**จากกราฟในข้อ 2)**

*  และ  ตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด.............................................................
*  และ  ตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด..............................................................
*  และ  เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด.........................................................................................
* โดเมนของฟังก์ชัน  และ  คือ..........................................................................................
* เรนจ์ของฟังก์ชัน  และ  คือ............................................................................................

**ตอนที่ 3**

**คำชี้แจง** นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO fx-991EX Classwiz ในการวาดกราฟของ

1. **** และ  2)  และ

**จากกราฟในข้อ 1)**

*  ตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด .........................................................................
*  ตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด .........................................................................
*  ตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด .........................................................................
*  ตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด............................................................................
*  และ  เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด .......................................................................................
* โดเมนและเรนจ์ของ  คือ......................................................................................................
* โดเมนและเรนจ์ของ  คือ.......................................................................................................
*  และ  เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่........................................................................................

**จากกราฟในข้อ 2)**

*  ตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด.........................................................................
*  ตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด.........................................................................
*  ตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด..........................................................................
*  ตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงระบุจุดตัด..........................................................................
*  และ  เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด.......................................................................................
* โดเมนและเรนจ์ของ  คือ....................................................................................................
* โดเมนและเรนจ์ของ  คือ.....................................................................................................
*  และ  เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่.......................................................................................

**ตอนที่ 4**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาค่าของฟังก์ชันลงในตาราง และวาดกราฟต่อไปนี้พร้อมทั้งตอบคำถาม

1.  และ 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |

****

**จากข้อ 1)**

* เมื่อ = 1  หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงระบุค่าของ ......................................
* เมื่อ = 1  หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงระบุค่าของ .......................................
* โดเมนของ คือ....................................... โดเมนของ คือ............................................
*  ตัดแกน ที่จุด ...................................  ตัดแกน ที่จุด .........................................
*  ,  ,

ดังนั้น 

* เมื่อพิจารณากราฟ  และ  สัมพันธ์กันอย่างไร.................................................................

1.  และ 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 |  |  |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |

****

**จากข้อ 2)**

* เมื่อ = 0  หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงระบุค่าของ ...................................
* เมื่อ = 0  หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงระบุค่าของ .......................................
* โดเมนของ คือ.........................................โดเมนของ คือ...............................................
*  ตัดแกน ที่จุด ......................................  ตัดแกน ที่จุด ...........................................
*  ,  , ดังนั้น 
* เมื่อพิจารณากราฟ  และ  สัมพันธ์กันอย่างไร..................................................................

**จากข้อ 1) และ 2)**

ถ้ากำหนดให้  และ 

เมื่อ  กราฟของ  เกิดจากการเลื่อนกราฟของ  ไปทาง..................เป็นระยะ .....................หน่วย

เมื่อ  กราฟของ  เกิดจากการเลื่อนกราฟของ  ไปทาง..................เป็นระยะ .....................หน่วย

1.  และ 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |

****

**จากข้อ 3)**

* โดเมนของ คือ..............................................โดเมนของ คือ..........................................
*  ตัดแกน X ที่จุด .......................................  ตัดแกน X ที่จุด ..........................................
*  ,  , 

ดังนั้น

* เมื่อพิจารณากราฟ  และ  สัมพันธ์กันอย่างไร.................................................................

1.  และ 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |

****

**จากข้อ 4)**

* โดเมนของ คือ........................................โดเมนของ คือ............................................
*  ตัดแกน ที่จุด ...................................  ตัดแกน ที่จุด .........................................
*  ,  , 

ดังนั้น……………

* เมื่อพิจารณากราฟ  และ  สัมพันธ์กันอย่างไร............................................................

**จากข้อ 3) และ 4)**

ถ้ากำหนดให้  และ 

เมื่อ  กราฟของ  เกิดจากการเลื่อนกราฟของ  ไปทาง.................เป็นระยะ .......................หน่วย

เมื่อ  กราฟของ  เกิดจากการเลื่อนกราฟของ  ไปทาง.................เป็นระยะ .......................หน่วย

**แบบฝึกทักษะที่ 10**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งตอบคำถาม โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

1. ****  2) 

โดเมน....................................................... โดเมน....................................................

เรนจ์.......................................................... เรนจ์......................................................

เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด............................ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด..........................

จุดตัดแกน X คือ....................................... จุดตัดแกน X คือ...................................

1. **** 4) 

โดเมน....................................................... โดเมน....................................................

เรนจ์.......................................................... เรนจ์......................................................

เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด............................ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด..........................

จุดตัดแกน X คือ....................................... จุดตัดแกน X คือ...................................

1.  6) 

**** ****

โดเมน....................................................... โดเมน....................................................

เรนจ์.......................................................... เรนจ์......................................................

เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด............................ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด..........................

1.  8) 

**** ****

โดเมน....................................................... โดเมน....................................................

เรนจ์.......................................................... เรนจ์......................................................

เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด............................ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด..........................